主要な研究業績の要旨

池田 康

微分多様体 M 上の滑らかな関数環 $C^\infty M$ に Poisson 括弧 (古典力学における Poisson 括弧を公理化したもの) が定まっているとき, M を Poisson 多様体という。特に (実または複素) 有限次元 Lie 環 g の双対空間 g^* は Lie–Poisson 構造と呼ばれる自然な構造により, Poisson 多様体である。1978 年に Mischnko と Fomenko は Poisson 多様体 (M, π) (π は微分多様体 M の Poisson bivector 場) 上の滑らかな vector 場 ξ が $[\xi, [\xi, \pi]] = 0$ ($[\xi, \eta]$ は bivector 場 η の vector 場 ξ による Lie 微分) をみたすとき, 任意の自然数 m, n と任意の Poisson 中心な $C^\infty M$ の元 x, y に対して, $\{\xi^m x, \xi^n y\} = 0$ が成り立つことを示した。特に $M = g^*$ 上の定 vector 場 ξ に対して $C^\infty g^*$ のかわりにその部分代数である g の対称代数 Sg を考えても同様の主張が成り立つ。この定理は argument shift 法と呼ばれている。Kontsevich は 2004 年に任意の Poisson 多様体は変形量子化を持つことを示した。前述の $M = g^*$ のとき, 対称代数 Sg の変形量子化として Planck 定数を正規化して得られる普遍展開代数 Ug を考えることが自然である。 m と x を動かして $\xi^m x$ が生成する Sg の Poisson 可換部分代数 C_ξ を量子化して得られると考えられる Ug の可換部分代数 $\hat{C}_\xi$ は ξ 方向の量子 Mischnko–Fomenko 代数といい, 最近にいたるまでいろいろな典型的な例に対して存在と一意性が示されてきた。argument shift 代数 C_ξ の量子化についての研究が進む一方で, 私と共著者の研究まで, 定 vector 場 ξ の量子化について考えたものはなかった。

定 vector 場 ξ の量子化 $\hat{\xi}$ は argument shift 法において Poisson かっこを交換関係に置き換えたものをみたし, 量子 Mischnko–Fomenko 代数 $\hat{C}_\xi$ を生成することが期待される。私は共著論文 [2] において $g = gl(d, \mathbb{C})$ のとき定 vector 場 ξ の量子化 $\hat{\xi}$ を提案し, 上述の条件が実際にみたされることを示した。

$$\begin{array}{ccc}
 \text{量子可積分系} & \hat{\xi} \xrightarrow{\text{生成}} \hat{C}_\xi & \\
 & \uparrow \text{量子化} & \uparrow \text{量子化} \\
 \text{古典可積分系} & \xi \xrightarrow{\text{生成}} C_\xi &
 \end{array}$$

共著論文 [2] において, 私の貢献は, 量子偏微分の明示公式 (命題 1), 量子化 $\hat{\xi}$ の不変部分空間の定式化 (補題 1), および, 主定理 (定理 1) を共著者とともに証明したことである。主定理により, 量子化 $\hat{\xi}$ の階数 m に応じて, 量子 Mischnko–Fomenko 代数 $\hat{C}_\xi$ の部分代数の増大列 $\hat{C}_\xi^{(m)} \nearrow \hat{C}_\xi$ が定まる。量子化 $\hat{\xi}$ は 2012 年に Gurevich–Pyatov–Saponov が導入した量子偏微分 ∂_j^i を行列要素を持つ行列 ∂ を用いて $\hat{\xi} = \text{tr}(\xi \partial)$ と表される。主定理は量子偏微分 ∂ の重要な応用を示したものである。主定理の前段階として単著論文 [1] において, 任意の中心元 x に対して $\hat{\xi}^m x$ を計算するための十分な明示公式

$$\partial(e^n)_j^i = \sum_{m=0}^n (f_+^{(n-m)}(e)(e^m)_j^i + f_-^{(n-m)}(e)_j^i(e^m)^i), \quad f_\pm^{(n)}(x) = \sum_{m=0}^n \frac{1 \pm (-1)^{n-m}}{2} \binom{n-1}{m} x^m$$

を得た。この公式を用いて, 単著論文 [3] において, 2 階の量子 Mischnko–Fomenko 代数 $\hat{C}_\xi^{(2)}$ の生成元

$$\text{tr}(\xi^2 e), \text{tr}(2\xi^2 e^2 + \xi e \xi e), \text{tr}(\xi^2 e^3 + \xi e \xi e^2), \text{tr}(2\xi^2 e^4 + 2\xi e \xi e^3 + \xi e^2 \xi e^2 + \xi^2 e^2), \dots$$

を特定した。

参考文献

- [1] Yasushi Ikeda. Quasidifferential operator and quantum argument shift method. *Theoretical and Mathematical Physics*. **212** (1) (2022) 918–924.
- [2] Yasushi Ikeda and Gerogy Sharygin. The argument shift method in universal enveloping algebra $U\mathfrak{gl}_d$. *Journal of Geometry and Physics*. **195** (2024) 105030.
- [3] Yasushi Ikeda. Second-order quantum argument shifts in $U\mathfrak{gl}_d$. *Theoretical and Mathematical Physics*. **220** (2) (2024) 1294–1303.
- [4] Yasushi Ikeda, Alexander Molev, and Georgy Sharygin. On the quantum argument shift method. *Communications in Algebra*. (2025) to appear.